

Observation et Commande d'Attitude d'Engins Volants sans Pilote Humain à Bord

A. Benallegue¹, A. Tayebi²

¹Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes de Versailles, Université de Versailles Saint Quentin,

²Department of Electrical and Computer Engineering, University of Antario, Canada.

GT UAV 2012

1 Position du problème

- Pilotage des UAVs
- Représentation de l'attitude
- Problématique de la détermination de l'attitude
- Problématique de la commande de l'attitude

2 Estimation de l'attitude

- Filtre complémentaire explicite dans S^3
- Filtre complémentaire explicite discontinu dans S^3

1 Position du problème

- Pilotage des UAVs
 - Représentation de l'attitude
 - Problématique de la détermination de l'attitude
 - Problématique de la commande de l'attitude

2 Estimation de l'attitude

- Filtre complémentaire explicite dans \mathbb{S}^3
- Filtre complémentaire explicite discontinu dans \mathbb{S}^3

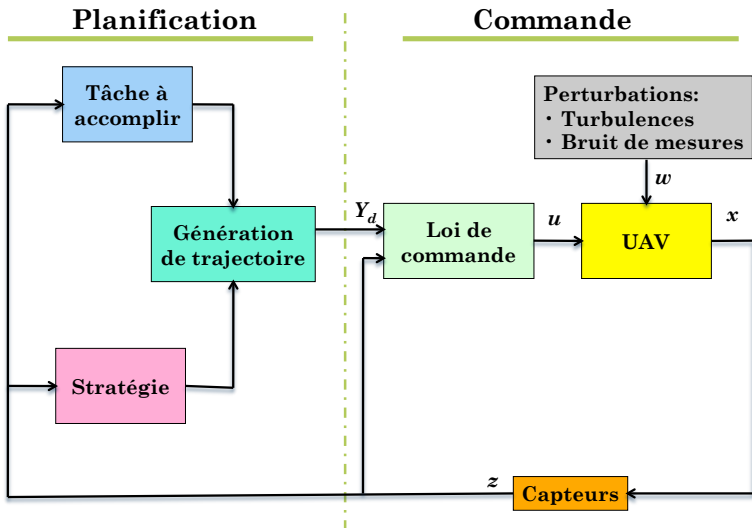
Pilotage des UAVs

- **Objectif:** Conception de système de commande permettant à un UAV (**engin volant sans pilote humain à bord**) de se positionner, de s'orienter et de mener des missions de longue durée, dans un large domaine de vol quelque soit les conditions: vent, turbulences, intempéries, visibilité, etc.
- **Propositions :**
 - **Pilote semi-automatique (pilote humain déporté au sol)**
 - Le positionnement et le guidage sont réalisés par l'opérateur
 - La commande de l'assiette assiste l'opérateur dans ses manoeuvres
 - Inconvénient : Un rayon d'action réduit (mission impossible si l'engin est hors de vue).
 - **Pilote automatique (sans pilote humain)**
 - Aucune intervention humaine, le positionnement et le guidage sont réalisés par le pilote automatique
 - La commande de l'assiette est une boucle interne du système de commande global
 - Avantage : Un rayon d'action augmenté.

Pilotage des UAVs

- **Objectif:** Conception de système de commande permettant à un UAV (engin volant sans pilote humain à bord) de se positionner, de s'orienter et de mener des missions de longue durée, dans un large domaine de vol quelque soit les conditions: vent, turbulences, intempéries, visibilité, etc.
- **Propositions :**
 - Pilote semi-automatique (pilote humain déporté au sol)
 - Le positionnement et le guidage sont réalisés par l'opérateur
 - La commande de l'assiette assiste l'opérateur dans ses manoeuvres
 - Inconvénient : Un rayon d'action réduit (mission impossible si l'engin est hors de vue).
 - Pilote automatique (sans pilote humain)
 - Aucune intervention humaine, le positionnement et le guidage sont réalisés par le pilote automatique
 - La commande de l'assiette est une boucle interne du système de commande global
 - Avantage : Un rayon d'action augmenté.

Schéma du pilote automatique

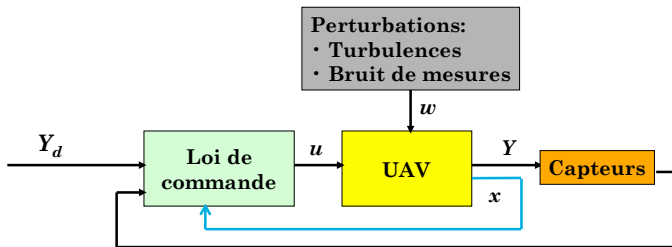


Conception du pilote automatique

- Commande haut niveau : Planification et génération de trajectoire



- Commande bas niveau : Synthèse de loi de commande



Commande en attitude (bas niveau)

Définition

Les coordonnées d'attitude forment l'ensemble des paramètres qui décrivent l'orientation d'un corps rigide relativement à un repère de référence.

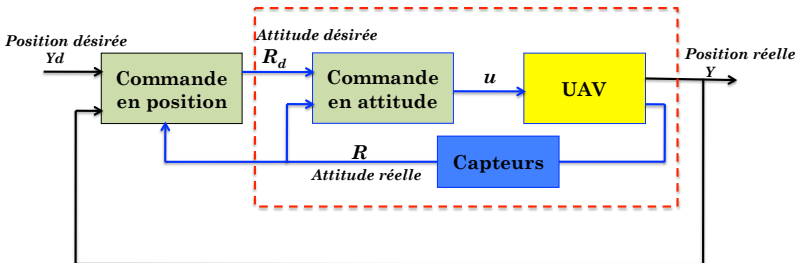


FIGURE: Schéma de la commande en attitude vue comme une boucle interne

Problème

Plusieurs choix de coordonnées d'attitude sont possibles.

1 Position du problème

- Pilotage des UAVs
- Représentation de l'attitude
- Problématique de la détermination de l'attitude
- Problématique de la commande de l'attitude

2 Estimation de l'attitude

- Filtre complémentaire explicite dans S^3
- Filtre complémentaire explicite discontinu dans S^3

Représentation de l'attitude

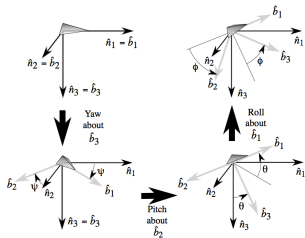
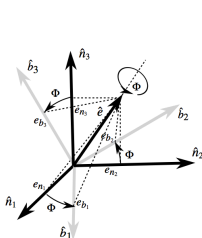
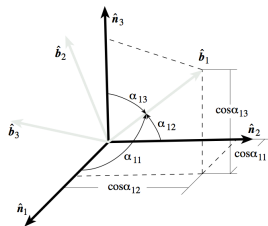
- Un minimum de trois coordonnées est nécessaire pour décrire la rotation d'un corps.

Problème

- **Tout ensemble minimal de trois coordonnées d'attitude** contient au moins une orientation géométrique où les coordonnées sont **singulières** \implies La recherche de la meilleure description de l'orientation est une étape fondamentale. En effet,
 - au niveau des singularités géométriques, les équations différentielles cinématiques sont aussi singulières,
 - **un mauvais choix peut artificiellement limiter l'espace opérationnel du système commandé en lui imposant d'évoluer dans l'espace non singulier des paramètres choisis.**
- Des ensembles redondants d'au moins quatre coordonnées existent et universellement déterminés, ils ne contiennent pas de singularités géométriques.

Quelques exemples de représentation de l'attitude

Exemples de représentation	Globale	Unique
Angles d'Euler ψ, θ, ϕ	Non	Non
Quaternions Q (Axe-Angle)	Oui	Non
Matrice des Cosinus Directeurs R	Oui	Oui

Euler Angles ψ, θ, ϕ Axe-Angle (Φ, \hat{e}) Cosine director $\cos(\alpha_{ij})$

Quaternions (quatre paramètres)

- La rotation d'un angle Φ autour d'un axe décrit par le vecteur unitaire $\hat{e} \in \mathbb{R}^3$, peut être paramétrée par le quaternion unitaire $Q = (q_0, q)$ avec $q_0 \in \mathbb{R}$, $q \in \mathbb{R}^3$

$$q_0 = \cos\left(\frac{\Phi}{2}\right), \quad q = \sin\left(\frac{\Phi}{2}\right)\hat{e}$$

- Le quaternion unitaire Q est un élément de l'espace \mathbb{S}^3

$$\mathbb{S}^3 = \{X \in \mathbb{R}^4 \mid X^T X = 1\}$$

- L'équation cinématique est donnée par

$$\dot{Q} = \frac{1}{2} Q \odot \bar{\omega},$$

où $\bar{\omega} = (0, \omega) \in \mathbb{H}$. \mathbb{H} est l'espace des quaternions non unitaires.

Matrice des cosinus directeurs (neuf paramètres)

- La rotation peut être décrite par la matrice de rotation $R \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{11}) & \cos(\alpha_{12}) & \cos(\alpha_{13}) \\ \cos(\alpha_{21}) & \cos(\alpha_{22}) & \cos(\alpha_{23}) \\ \cos(\alpha_{31}) & \cos(\alpha_{32}) & \cos(\alpha_{33}) \end{bmatrix}$$

- La matrice R est un élément de l'espace $SO(3)$

$$SO(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid A^T A = A A^T = I, \det(A) = 1\}$$

- L'équation cinématique est donnée par

$$\dot{R} = R S(\omega)$$

où $S : \mathbb{R}^3 \rightarrow so(3)$, telle que

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}; S(U)V = U \times V, (\times : \text{produit vectoriel})$$

1 Position du problème

- Pilotage des UAVs
- Représentation de l'attitude
- **Problématique de la détermination de l'attitude**
- Problématique de la commande de l'attitude

2 Estimation de l'attitude

- Filtre complémentaire explicite dans S^3
- Filtre complémentaire explicite discontinu dans S^3

1 Position du problème

- Pilotage des UAVs
- Représentation de l'attitude
- Problématique de la détermination de l'attitude
- Problématique de la commande de l'attitude

2 Estimation de l'attitude

- Filtre complémentaire explicite dans S^3
- Filtre complémentaire explicite discontinu dans S^3

Problématique de la commande d'attitude

- La loi de commande peut être calculée indépendamment de l'estimation de l'attitude. **Complexité réduite mais résultat non garanti** (le principe de séparation observateur/commande n'est pas toujours valide en nonlinéaire).
- La loi de commande peut considérer le problème global (commande plus observation). **Plus complexe mais résultat garanti**.
- Loi de commande peut être calculée sans mesure de l'attitude. **Complexité réduite et résultat garanti**.
- *Obstruction topologique de l'espace des rotations. Il n'existe pas de retour d'état continu qui peut garantir la stabilisation globale¹.*

¹S. P. Bhat and D. S. Bernstein "A topological obstruction to continuous global stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon", *Systems & Control Letters*, Vol. 39, pp. 63-70, 2000.

Problématique de la commande d'attitude

- La loi de commande peut être calculée indépendamment de l'estimation de l'attitude. **Complexité réduite mais résultat non garanti** (le principe de séparation observateur/commande n'est pas toujours valide en nonlinéaire).
- La loi de commande peut considérer le problème global (commande plus observation). **Plus complexe mais résultat garanti.**
- Loi de commande peut être calculée sans mesure de l'attitude. **Complexité réduite et résultat garanti.**
- *Obstruction topologique de l'espace des rotations. Il n'existe pas de retour d'état continu qui peut garantir la stabilisation globale¹.*

¹S. P. Bhat and D. S. Bernstein "A topological obstruction to continuous global stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon", *Systems & Control Letters*, Vol. 39, pp. 63-70, 2000.

Problématique de la commande d'attitude

- La loi de commande peut être calculée indépendamment de l'estimation de l'attitude. **Complexité réduite mais résultat non garanti** (le principe de séparation observateur/commande n'est pas toujours valide en nonlinéaire).
- La loi de commande peut considérer le problème global (commande plus observation). **Plus complexe mais résultat garanti.**
- Loi de commande peut être calculée sans mesure de l'attitude. **Complexité réduite et résultat garanti.**
- *Obstruction topologique de l'espace des rotations. Il n'existe pas de retour d'état continu qui peut garantir la stabilisation globale¹.*

¹S. P. Bhat and D. S. Bernstein "A topological obstruction to continuous global stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon", *Systems & Control Letters*, Vol. 39, pp. 63-70, 2000.

Problématique de la commande d'attitude

- La loi de commande peut être calculée indépendamment de l'estimation de l'attitude. **Complexité réduite mais résultat non garanti** (le principe de séparation observateur/commande n'est pas toujours valide en nonlinéaire).
- La loi de commande peut considérer le problème global (commande plus observation). **Plus complexe mais résultat garanti.**
- Loi de commande peut être calculée sans mesure de l'attitude. **Complexité réduite et résultat garanti.**
- ***Obstruction topologique de l'espace des rotations. Il n'existe pas de retour d'état continu qui peut garantir la stabilisation globale¹.***

¹S. P. Bhat and D. S. Bernstein "A topological obstruction to continuous global stabilization of rotational motion and the unwinding phenomenon", *Systems & Control Letters*, Vol. 39, pp. 63-70, 2000.

Obstruction Topologique²

Stabiliser la configuration A :

- Un champ de vecteur force continu qui oriente l'aiguille à la configuration A à partir de toute configuration ou point sur le cercle, est construite par les vecteurs tangentiels au cercle.
- Puisque ce champ de vecteur pointe dans une direction opposée dans la partie basse et haute du cercle, le champ de vecteur force doit s'annuler au point B.
- L'annulation du champ de vecteur force en B crée un second équilibre avec celui de A.
- De la même façon, un retour d'état continu, conduit à plusieurs équilibres dans $SO(3)$.

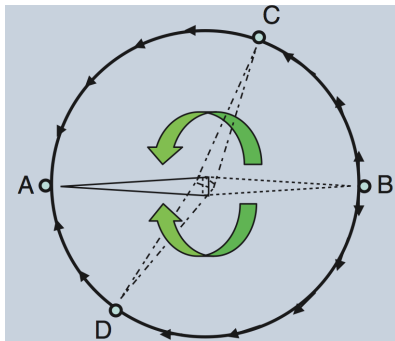


Illustration de l'impossibilité d'assurer une stabilisation globale par une commande continue d'une rotation planaire (la variété des configurations est le cercle S^1).

²Chaturvedi, N.A. Sanyal, A.K. McClamroch, N.H., "Rigid-Body Attitude Control", IEEE Control Systems Magazine, June 2011.

Choix de la représentation de l'attitude

- Dans le cas d'applications où le corps en rotation est physiquement contraint, les représentations telles que les angles d'Euler ou les paramètres de Rodriguez peuvent être utilisées. En effet, on peut ne pas arriver aux singularités grâce aux contraintes physiques.
- Dans le cas d'engins aériens (pas de contraintes physiques), l'utilisation de représentation minimale est risquée. Il vaut mieux utiliser les représentations globales (non singulières). On peut choisir d'utiliser

- **Matrice R** : synthèse de l'observateur (la commande) dans $SO(3)$

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid R^T R = R R^T = I, \det(R) = 1\}$$

- **Quaternion unitaire Q** : synthèse de l'observateur (la commande) dans S^3

$$S^3 = \{Q = (q_0, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mid q_0^2 + q^T q = 1\}$$

Remarque

Pour des raisons de complexité, de robustesses et de temps de calculs, l'algorithme d'estimation ou de commande est considéré dans l'espace S^3 .

Choix de la représentation de l'attitude

- Dans le cas d'applications où le corps en rotation est physiquement contraint, les représentations telles que les angles d'Euler ou les paramètres de Rodriguez peuvent être utilisées. En effet, on peut ne pas arriver aux singularités grâce aux contraintes physiques.
- Dans le cas d'engins aériens (pas de contraintes physiques), l'utilisation de représentation minimale est risquée. Il vaut mieux utiliser les représentations globales (non singulières). On peut choisir d'utiliser

- **Matrice R** : synthèse de l'observateur (la commande) dans $SO(3)$

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid R^T R = R R^T = I, \det(R) = 1\}$$

- **Quaternion unitaire Q** : synthèse de l'observateur (la commande) dans \mathbb{S}^3

$$\mathbb{S}^3 = \{Q = (q_0, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mid q_0^2 + q^T q = 1\}$$

Remarque

Pour des raisons de complexité, de robustesses et de temps de calculs, l'algorithme d'estimation ou de commande est considéré dans l'espace \mathbb{S}^3 .

Choix de la représentation de l'attitude

- Dans le cas d'applications où le corps en rotation est physiquement contraint, les représentations telles que les angles d'Euler ou les paramètres de Rodriguez peuvent être utilisées. En effet, on peut ne pas arriver aux singularités grâce aux contraintes physiques.
- Dans le cas d'engins aériens (pas de contraintes physiques), l'utilisation de représentation minimale est risquée. Il vaut mieux utiliser les représentations globales (non singulières). On peut choisir d'utiliser

- **Matrice R** : synthèse de l'observateur (la commande) dans $SO(3)$

$$SO(3) = \{R \in \mathbb{R}^{3 \times 3} \mid R^T R = R R^T = I, \det(R) = 1\}$$

- **Quaternion unitaire Q** : synthèse de l'observateur (la commande) dans \mathbb{S}^3

$$\mathbb{S}^3 = \{Q = (q_0, q) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \mid q_0^2 + q^T q = 1\}$$

Remarque

Pour des raisons de complexité, de robustesses et de temps de calculs, l'algorithme d'estimation ou de commande est considéré dans l'espace \mathbb{S}^3 .

L'espace \mathbb{S}^3 des quaternions unitaires

- L'espace \mathbb{S}^3 des quaternions unitaires a la structure d'un groupe de Lie muni de la multiplication des quaternions (qui est distributive et associative mais non commutative) notée " \odot ".
- La multiplication " \odot " de deux quaternions $Q = (q_0, q)$ et $P = (p_0, p)$ est définie par :

$$Q \odot P = \begin{bmatrix} q_0 p_0 - q^T p \\ q_0 p + p_0 q + q \times p \end{bmatrix}$$

où " \times " représente le produit vectoriel.

- Le quaternion $(1, \mathbf{0})$ est l'élément neutre. D'où pour un quaternion unitaire $Q = (q_0, q)$, nous avons $Q^{-1} = (q_0, -q)$ et

$$Q \odot Q^{-1} = Q^{-1} \odot Q = (1, \mathbf{0})$$

L'espace \mathbb{S}^3 et la rotation

- Le vecteur $V_B \in \mathbb{R}^3$, exprimé dans le mobile F_B , est représenté par le vecteur $V_I \in \mathbb{R}^3$, exprimé dans le repère inertiel F_I en utilisant la transformation

$$V_I = R V_B \quad (V_B = R^T V_I)$$

R est la rotation du repère F_B par rapport au repère F_I .

- Le même résultat est obtenu en utilisant la transformation par le quaternion unitaire Q

$$\bar{V}_I = Q \odot \bar{V}_B \odot Q^{-1} \quad (\bar{V}_B = Q^{-1} \odot \bar{V}_I \odot Q)$$

avec $\bar{V}_B = (0, V_B) \in \mathbb{H}$ et $\bar{V}_I = (0, V_I) \in \mathbb{H}$

Les espaces $SO(3)$ et S^3

La matrice de rotation $R \in SO(3)$ est reliée au quaternion unitaire $Q = (q_0, q) \in S^3$ via la formule de Rodrigues $R = \mathcal{R}(Q)$ avec l'application $\mathcal{R} : S^3 \rightarrow SO(3)$ définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(Q) &= I + 2q_0S(q) + 2S^2(q) \\ &= (q_0^2 - q^Tq)I + 2qq^T + 2q_0S(q)\end{aligned}$$

Remarque

Deux quaternions (Q) et $(-Q)$ correspondent à la même rotation

$$R = \mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(-Q)$$

Si ce fait n'est pas pris en compte, on peut obtenir un phénomène indésirable connu sous le nom de phénomène de déroulement "Unwinding Phenomenon". En effet, pour une condition initiale proche de l'équilibre désiré, une trajectoire du système bouclé peut avoir le comportement d'une orbite homoclinique^a (les points d'équilibre "stable et instable" sont confondus).

^aChaturvedi, N.A. Sanyal, A.K. McClamroch, N.H., "Rigid-Body Attitude Control", IEEE Control Systems Magazine, June 2011.

Les espaces $SO(3)$ et S^3

La matrice de rotation $R \in SO(3)$ est reliée au quaternion unitaire $Q = (q_0, q) \in S^3$ via la formule de Rodrigues $R = \mathcal{R}(Q)$ avec l'application $\mathcal{R} : S^3 \rightarrow SO(3)$ définie par

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(Q) &= I + 2q_0S(q) + 2S^2(q) \\ &= (q_0^2 - q^Tq)I + 2qq^T + 2q_0S(q)\end{aligned}$$

Remarque

Deux quaternions (Q) et $(-Q)$ correspondent à la même rotation

$$R = \mathcal{R}(Q) = \mathcal{R}(-Q)$$

Si ce fait n'est pas pris en compte, on peut obtenir un phénomène indésirable connu sous le nom de phénomène de déroulement "Unwinding Phenomenon". En effet, pour une condition initiale proche de l'équilibre désiré, une trajectoire du système bouclé peut avoir le comportement d'une orbite homoclinique^a (les points d'équilibre "stable et instable" sont confondus).

^aChaturvedi, N.A. Sanyal, A.K. McClamroch, N.H., "Rigid-Body Attitude Control", IEEE Control Systems Magazine, June 2011.

Définition des erreurs et stabilité

- Dans $SO(3)$, une matrice de rotation erreur peut être définie par

$$\tilde{R} = R\hat{R}^T; (\tilde{R} = RR_d^T); (\dot{\tilde{R}} = \tilde{R}S(\tilde{\Omega}))$$

- L'équivalent dans S^3 , est donné par le quaternion unitaire erreur

$$\tilde{Q} = Q \odot \hat{Q}^{-1} \equiv (\tilde{q}_0, \tilde{q}) = \begin{bmatrix} q_0 \hat{q}_0 + q^T \hat{q} \\ \hat{q}_0 q - q_0 \hat{q} - q \times \hat{q} \end{bmatrix}$$

- Notons que R et \hat{R} (R et R_d) coïncident si $\tilde{R} = I$. De la même façon, Q et \hat{Q} (Q et Q_d) coïncident si $\tilde{Q} = (1, \mathbf{0})$.

Remarque

Le point d'équilibre défini dans l'espace $SO(3) \times \mathbb{R}^3$ par $(\tilde{R} = I, \tilde{\Omega} = 0)$ est équivalent aux deux points d'équilibres définis dans l'espace $S^3 \times \mathbb{R}^3$ par $(\tilde{Q} = (\tilde{q}_0, \tilde{q}) = (\pm 1, \mathbf{0}), \tilde{\Omega} = 0)$

1 Position du problème

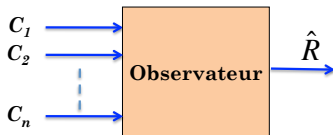
- Pilotage des UAVs
- Représentation de l'attitude
- Problématique de la détermination de l'attitude
- Problématique de la commande de l'attitude

2 Estimation de l'attitude

- Filtre complémentaire explicite dans S^3
- Filtre complémentaire explicite discontinu dans S^3

Objectif

- Concevoir un observateur par fusion multi-capteurs qui permet d'estimer l'attitude paramétrée par la matrice $R \in SO(3)$.



- L'observateur doit garantir ($\tilde{R} := R\hat{R}^T = I$), où $\hat{R}(t)$ est l'orientation estimée. L'équation nécessaire à l'estimation est

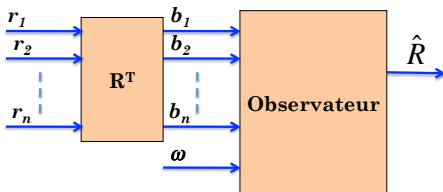
$$\dot{R} = RS(\omega) \quad (1)$$

- L'observateur utilisera la paramétrisation par le quaternion $Q \in S^3$, mais l'objectif est d'estimer la matrice R . Par conséquent, il faut garantir ($\tilde{Q} = Q \odot \hat{Q}^{-1} = (\pm 1, 0)$), où \hat{Q} est le quaternions estimé. L'équation équivalente à (1) dans S^3 est donnée par

$$\dot{Q} = \frac{1}{2}Q \odot (0, \omega) \quad (2)$$

Hypothèses

- Considérons n vecteurs b_i mesurés ($n \geq 2$) dans le repère F_B lié au corps (mobile), correspondant aux n vecteurs inertiels constants et connus r_i tels que $b_i = R^T r_i$.
- Supposons qu'il y a au moins deux vecteurs parmi les r_i qui sont non collinéaires.
- Le vecteur vitesse angulaire ω est mesurable.

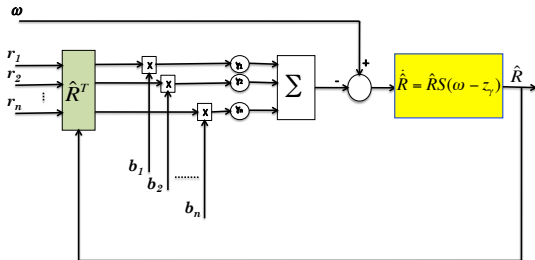


L'observateur

Le quaternion estimé \hat{Q} est obtenu par le filtre complémentaire explicite³

$$\begin{aligned}\dot{\hat{Q}} &= \frac{1}{2} \hat{Q} \odot \tilde{\omega}, \\ \hat{\omega} &= \omega - z_\gamma,\end{aligned}\tag{3}$$

où $z_\gamma \equiv \sum_{i=1}^{i=n} \gamma_i S(\hat{b}_i) b_i$ avec $\gamma_i > 0$, et $\hat{b}_i = \hat{R}^T r_i$, où $\hat{R} = \mathcal{R}(\hat{Q})$.



³R. Mahony, T. Hamel, J.-M. Pflimlin, "Nonlinear complementary filters on the special orthogonal group," IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 53 No. 5, pp. 1203–1218, 2008.

Dynamique de l'erreur

- L'erreur d'orientation $\tilde{R} = R\hat{R}^T$ correspond à l'erreur quaternion

$$\tilde{Q} = Q \odot \hat{Q}^{-1} \equiv (\tilde{q}_0, \tilde{\mathbf{q}})$$

- La dynamique de l'erreur est donnée par

$$\dot{\tilde{Q}} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}}_0 \\ \dot{\tilde{\mathbf{q}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\tilde{\mathbf{q}}^T \tilde{\omega} \\ \frac{1}{2}(\tilde{q}_0 I_3 + S(\tilde{\mathbf{q}}))\tilde{\omega} \end{pmatrix}, \quad (4)$$

avec $\tilde{\omega} = \hat{R}(\omega - \hat{\omega}) = \hat{R}z_\gamma$.

Lemme

Supposons les hypothèses énoncées ci-dessus vérifiées et les paramètres γ_i sont strictement positifs, alors les propriétés suivantes sont satisfaites

- ① Le vecteur z_γ peut s'écrire

$$z_\gamma \equiv \sum_{i=1}^n \gamma_i S(\hat{b}_i) b_i = -2\hat{R}^T (\tilde{q}_0 I - S(\tilde{q})) W_\gamma \tilde{q}, \quad (5)$$

où $W_\gamma = -\sum_{i=1}^n \gamma_i S(r_i)^2$ Symétrique Définie Positive (SPD).

- ② $z_\gamma = 0$ est équivalent à $(\tilde{q}_0 = 0, \tilde{q} = \pm v)$ ou $(\tilde{q}_0 = \pm 1, \tilde{q} = 0)$, avec v représente un des vecteurs propres unitaires de W_γ .

Théorème

Considérons l'observateur (3), avec les hypothèses vérifiées, alors

- $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{Q}(t) = (\pm 1, 0)$, qui est équivalent à $(\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{R}(t) = I)$, pour presque toute condition initiale (i.e., excepté pour $\Psi = \{\tilde{Q} = (\tilde{q}_0, \tilde{q}) \in S^3 \mid \tilde{q}_0 = 0\}$).
- La variété Ψ est invariante et non attractive.
- Si $\tilde{q}_0(0) = 0$, alors $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{Q}(t) = (0, \pm v)$, où v est un des vecteurs propres unitaires de W_γ .
- Convergence exponentielle si la condition initiale vérifie $\|\tilde{q}(0)\| < \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(W_\gamma)}{\lambda_{\max}(W_\gamma)}}$

Démonstration de (2) du lemme

- D'après (5), il est clair que $z_\gamma = 0$ est équivalent à

$$(\tilde{q}_0 I - S(\tilde{q})) W_\gamma \tilde{q} = 0, \quad (6)$$

- $(\tilde{q}_0 = \pm 1, \tilde{q} = 0)$ est une solution triviale.
- Les autres solutions peuvent être obtenues en supposant que $\tilde{q} \neq 0$. Multiplions (6) par \tilde{q}^T on obtient $\tilde{q}_0 \tilde{q}^T W_\gamma \tilde{q} = 0$, qui montre que $\tilde{q}_0 = 0$ est une solution puisque W_γ est SPD.
- Maintenant, nous recherchons la valeur de \tilde{q} pour laquelle $\tilde{q}_0 = 0$. Utilisons (6) avec $\tilde{q}_0 = 0$, on obtient

$$S(\tilde{q}) W_\gamma \tilde{q} = 0 \quad (7)$$

- Puisque W_γ est non singulière, l'égalité (7) est vérifiée si et seulement si $W_\gamma \tilde{q} = \pm \lambda \tilde{q}$, qui ne peut être vrai que si λ est une des valeurs propres de W_γ et $\tilde{q} = \pm v$, où v est un des vecteurs propres de W_γ .

Preuve du théorème

- La dynamique de l'erreur est réécrite en utilisant l'équation (5)

$$\begin{bmatrix} \dot{\tilde{q}}_0 \\ \dot{\tilde{q}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{q}_0 \tilde{q}^T W_\gamma \tilde{q} \\ -(I - \tilde{q} \tilde{q}^T) W_\gamma \tilde{q} \end{bmatrix}, \quad (\dot{x} = f(x)) \quad (8)$$

- Considérons la fonction de Lyapunov candidate suivante

$$V = 2\tilde{q}^T W_\gamma \tilde{q} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \gamma_i \tilde{b}_i^T \tilde{b}_i, \quad (9)$$

avec W_γ SPD d'après le lemme et $\tilde{b}_i = \hat{b}_i - b_i$.

- La dérivée temporelle de (9), au vue de (8), est donnée par

$$\dot{V} = -4\tilde{q}^T W_\gamma^T (I - \tilde{q} \tilde{q}^T) W_\gamma \tilde{q} = -z_\gamma^T z_\gamma$$

- On peut déduire que $\dot{V} \leq 0$ et que $\dot{V} = 0$ pour $z_\gamma(t) = 0$ ce qui implique, en utilisant le lemme, que $(\tilde{q}_0 = 0, \tilde{q} = \pm v)$ ou $(\tilde{q}_0 = \pm 1, \tilde{q} = 0)$.

Preuve du théorème

- Montrons que l'ensemble Ψ est invariant et instable (non-attractif), et le seul point d'équilibre stable est $(\tilde{q}_0 = \pm 1, \tilde{q} = 0)$. En effet, la dérivée temporelle de la partie scalaire du quaternion erreur \tilde{Q} , au vue de l'équation (8), est donnée par

$$\dot{\tilde{q}}_0 = \tilde{q}_0 \tilde{q}^T W_\gamma \tilde{q}$$

- Par conséquent, il est claire que $\dot{\tilde{q}}_0 = 0$ pour $\tilde{q}_0 = 0$, ce qui montre l'invariance de l'ensemble Ψ . On peut aussi vérifier que

$$\frac{d}{dt}(\tilde{q}_0^2) = 2\tilde{q}_0 \tilde{q}^T W_\gamma \tilde{q} \geq 0,$$

qui montre que $|\tilde{q}_0|$ est croissant tand que $\tilde{q}_0 \neq 0$ et $\tilde{q} \neq 0$. Par conséquent, si $\tilde{q}_0(0) \neq 0$, $\tilde{q}_0(t)$ ne traverse jamais le point zéro pour tout $t \geq 0$ et convergera vers l'équilibre $\tilde{q}_0 = \text{sgn}(\tilde{q}_0(0))$, ce qui permet de conclure que \tilde{Q} converge vers l'équilibre $(\pm 1, \mathbf{0})$.

Stabilité locale exponentielle

- La fonction de Lyapunov vérifie les inégalités suivantes

$$2\lambda_{\min}(W_\gamma) \|\tilde{q}\|^2 \leq V \leq 2\lambda_{\max}(W_\gamma) \|\tilde{q}\|^2$$

- Réécrivons \dot{V} comme suit

$$\dot{V} = -4 \|W_\gamma \tilde{q}\|^2 + V^2 \Rightarrow \dot{V} \leq -2 \frac{\lambda_{\min}^2(W_\gamma)}{\lambda_{\max}(W_\gamma)} V + V^2$$

- En appliquant le lemme de comparaison on peut aboutir à

$$V(t) \leq \frac{V(0)e^{(-\alpha t)}}{\left(\frac{1}{\alpha} V(0)e^{-\alpha t} + \frac{1}{\alpha} (\alpha - V(0))\right)}$$

avec $\alpha = \frac{2\lambda_{\min}^2(W_\gamma)}{\lambda_{\max}(W_\gamma)}$

- On peut voir que si $V(0) < \alpha \Leftrightarrow \|\tilde{q}(0)\| < \sqrt{\frac{\lambda_{\min}(W_\gamma)}{\lambda_{\max}(W_\gamma)}}$ on a la convergence exponentielle locale

$$V(t) \leq ce^{-\alpha t} \quad \left(c = \frac{\alpha V(0)}{(\alpha - V(0))} \right)$$

Conclusion

- Le filtre complémentaire a une convergence “almost global”
 - **Question** : est il possible d'avoir la convergence globale ?
 - **Réponse** : oui, utilisation d'une version discontinu du filtre ⁴

⁴A. Benallegue, A. Tayebi, “A Globally Convergent Attitude Observer Using Inertial Measurements,” submitted to CDC'2012.

1 Position du problème

- Pilotage des UAVs
- Représentation de l'attitude
- Problématique de la détermination de l'attitude
- Problématique de la commande de l'attitude

2 Estimation de l'attitude

- Filtre complémentaire explicite dans S^3
- Filtre complémentaire explicite discontinu dans S^3

Hypothèses

- Considérons 2 vecteurs $b_1, b_2 \in \mathbb{R}^3$ mesurés dans le repère F_B lié au corps (mobile), correspondant à 2 vecteurs inertiels constants et connus $r_1, r_2 \in \mathbb{R}^3$ tels que $b_i = R^T r_i$.
- Supposons que les deux vecteurs r_1, r_2 sont non colinéaires.
- Le vecteur vitesse angulaire ω est mesurable.

Formation d'une base

- Définissons les vecteurs inertiels normalisés

$$v_1 = \frac{r_1}{\|r_1\|}; v_2 = \frac{r_1 \times r_2}{\|r_1 \times r_2\|}; v_3 = \frac{(r_1 \times r_2) \times r_1}{\|(r_1 \times r_2) \times r_1\|}$$

Il est clair que $\{v_1, v_2, v_3\}$ forment une base orthonormale.

- Définissons les vecteurs de mesure normalisés

$$u_1 = \frac{b_1}{\|r_1\|}; u_2 = \frac{b_1 \times b_2}{\|r_1 \times r_2\|}; u_3 = \frac{(b_1 \times b_2) \times b_1}{\|(r_1 \times r_2) \times r_1\|}$$

- En utilisant le fait que $b_1 = R^T r_1$ et $b_2 = R^T r_2$, on peut facilement montrer que $u_i = R^T v_i$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

L'observateur

- Le quaternion estimé \hat{Q} est obtenu par le filtre complémentaire explicite discontinu suivant

$$\begin{aligned}\dot{\hat{Q}} &= \frac{1}{2} \hat{Q} \odot \bar{\hat{\omega}}, \\ \hat{\omega} &= \omega - z_\gamma - \beta \hat{R}^T \text{Sgn}(\hat{R} z_\gamma),\end{aligned}\tag{10}$$

$$z_\gamma := \gamma \sum_{i=1}^3 S(\hat{u}_i) u_i \text{ et } \beta := \alpha \left(\sum_{i=1}^3 \tilde{u}_i^T \tilde{u}_i \right),$$

$$\hat{u}_i = \hat{R}^T v_i, \tilde{u}_i = \hat{u}_i - u_i, \alpha, \gamma > 0 \text{ et } \hat{R} := \mathcal{R}(\hat{Q}).$$

- La fonction Sgn est définie par $\text{Sgn} : \mathbb{R}^3 \ni X \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que

$$\text{Sgn}(X) = [\text{sgn}(x_1), \text{sgn}(x_2), \text{sgn}(x_3)]^T$$

avec

$$\text{sgn}(x_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } x_i \geq 0 \\ -1 & \text{si } x_i < 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, 3)\tag{11}$$

Dynamique de l'erreur

- L'erreur d'orientation $\tilde{R} = R\hat{R}^T$ correspond à l'erreur quaternion

$$\tilde{Q} = Q \odot \hat{Q}^{-1} \equiv (\tilde{q}_0, \tilde{q})$$

- La dynamique de l'erreur est donnée par

$$\dot{\tilde{Q}} = \begin{pmatrix} \dot{\tilde{q}}_0 \\ \dot{\tilde{q}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\tilde{q}^T \tilde{\omega} \\ \frac{1}{2}(\tilde{q}_0 I_3 + S(\tilde{q}))\tilde{\omega} \end{pmatrix}, \quad (12)$$

avec $\tilde{\omega} = \hat{R}(\omega - \hat{\omega}) = \hat{R}(z_\gamma + \beta \hat{R}^T \text{Sgn}(\hat{R}z_\gamma))$.

- On peut facilement montrer que le vecteur z_γ et la fonction scalaire β peuvent s'écrire

$$z_\gamma = \gamma \sum_{i=1}^3 S(\hat{u}_i) u_i = -4\gamma \hat{R}^T \tilde{q}_0 \tilde{q}$$

$$\beta = \alpha \left(\sum_{i=1}^3 \tilde{u}_i^T \tilde{u}_i \right) = 8\alpha \tilde{q}^T \tilde{q}$$

- Ce qui permet d'écrire

$$\tilde{\omega} = -4\gamma \tilde{q}_0 \tilde{q} - 8\alpha \tilde{q}^T \tilde{q} \text{Sgn}(\tilde{q}_0 \tilde{q})$$

Théorème de convergence

Théorème

Considérons l'observateur (10), avec 2 vecteurs de mesure b_1 et b_2 , correspondant aux vecteurs inertiels non colinéaires r_1 et r_2 , alors

- $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{Q}(t) = (\pm 1, 0)$, qui est équivalent à $(\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{R}(t) = I)$, pour toute condition initiale.
- Pour $\tilde{q}_0(0) \neq 0$ ($\|\tilde{q}(0)\| < 1$), nous avons

$$\|\tilde{q}(t)\|^2 \leq \frac{ce^{-4\gamma t}}{1 + ce^{-4\gamma t}} < ce^{-4\gamma t} \quad (13)$$

$$\text{avec } c = \frac{\|\tilde{q}(0)\|^2}{1 - \|\tilde{q}(0)\|^2}$$

Preuve du théorème

- En substituant $\tilde{\omega}$ dans (12) on obtient la dynamique de l'erreur scalaire

$$\dot{\tilde{q}}_0 = 2\gamma\tilde{q}_0\tilde{q}^T\tilde{q} + 4\alpha\text{sign}(\tilde{q}_0)\tilde{q}^T\tilde{q}\|\tilde{q}\|_1 \quad (14)$$

- Considérons la fonction de Lyapunov candidate

$$V(\tilde{q}) = \tilde{q}^T\tilde{q} = (1 - \tilde{q}_0^2), \quad (15)$$

qui a sa dérivé temporelle, au vue de (14), donnée par

$$\dot{V} = -4\gamma\tilde{q}_0^2\tilde{q}^T\tilde{q} - 8\alpha|\tilde{q}_0|\tilde{q}^T\tilde{q}\|\tilde{q}\|_1, \quad (16)$$

$\dot{V} \leq 0$, \ddot{V} est bornée, alors $\dot{V} \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$, d'où $\tilde{q} \rightarrow 0$ ou $\tilde{q}_0 \rightarrow 0$ quand $t \rightarrow \infty$. Au vue de (14), il est claire que $\tilde{q}_0 = 0$ n'est pas invariant, ceci est dû à la définition du signe donnée par (11). Par conséquent, la seule possibilité est $\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{q}(t) = 0$.

- Finalement, en utilisant le lemme de comparaison on obtient (13), pour le cas où $V(0) \neq 1$ ($\tilde{q}_0(0) \neq 0$), en utilisant le fait que

$$\dot{V} \leq -4\gamma\tilde{q}_0^2\tilde{q}^T\tilde{q} = -4\gamma(1 - V)V$$

Simulations

- Les paramètres de simulation pour le filtre complémentaire explicite

- Gains de l'observateur

$$\gamma_1 = \gamma_2 = 10$$

- Les valeurs et vecteurs propres de la matrice W_γ sont

$$\lambda_1 = 3.8197 \quad v_1 = (-0.8507, 0, -0.5257)^T$$

$$\lambda_2 = 26.1803 ; \quad v_2 = (0.5257, 0, -0.8507)^T$$

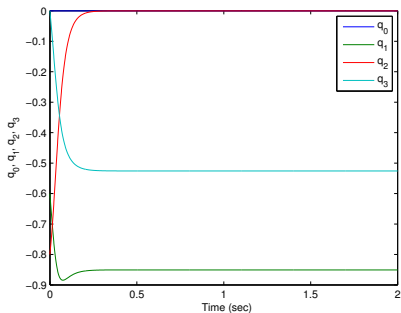
$$\lambda_3 = 30 \quad v_3 = (0, 1, 0)^T$$

- Les paramètres de simulation pour le filtre proposé

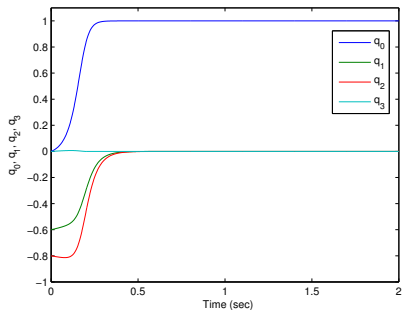
- Gains de l'observateur

$$\gamma = 10, \alpha = 0.1$$

Résultats de simulation (1)



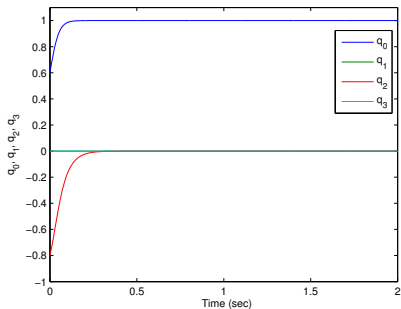
(a)



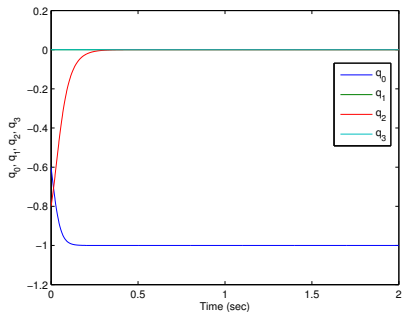
(b)

Figure: Condition initiale $\tilde{q}_0(0) = 0$. (a) filtre complémentaire explicite, $\tilde{Q} \rightarrow (0, -0.8507, 0, -0.5257) = (0, v_1)$. (b) filtre complémentaire explicite discontinu, $\tilde{Q} \rightarrow (1, 0, 0, 0)$.

Résultats de simulation (2)



(a)



(b)

Figure: (a) condition initiale $\tilde{q}_0(0) > 0$, $\tilde{Q} \rightarrow (1, 0, 0, 0)$. (b) condition initiale $\tilde{q}_0(0) < 0$, $\tilde{Q} \rightarrow (-1, 0, 0, 0)$

Merci pour votre attention