# Estimateur d'ordre réduit de la vitesse d'un quadrirotor. Application à la détection de défaut des accéléromètres.

*GT UAV - Inter GdR MACS-Robotique Paris*


Hugues Rafaralahy

Hugues.Rafaralahy@uhp-nancy.fr

M. Boutayeb, H. Rafaralahy, E. Richard and M. Zasadzinski

CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

CRAN

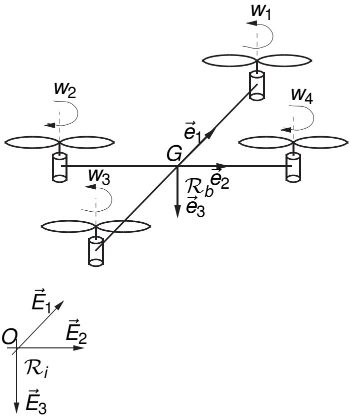
Nancy-Université


Jeudi 26 mars 2009

# Plan

# Représentation du Quadrirotor





# UAV : modèle dynamique



## Angles de Cardan $\longrightarrow$ mesurés

$$\left\{\begin{array}{lll} \dot{\Phi} & = & p + q\tan\theta\sin\Phi + r\tan\theta\cos\Phi \\ \dot{\theta} & = & q\cos\Phi - r\sin\Phi \\ \dot{\psi} & = & q\dfrac{\sin\Phi}{\cos\theta} + r\dfrac{\cos\Phi}{\cos\theta} \end{array}\right. \qquad (1)$$

## Vitesse angulaire $\longrightarrow$ mesurée

$$\left\{\begin{array}{lll} \dot{p} & = & -\dfrac{I_{zz} - I_{yy}}{I_{xx}} qr + \dfrac{\tau_\Phi}{I_{xx}} \\ \dot{q} & = & -\dfrac{I_{xx} - I_{zz}}{I_{yy}} pr + \dfrac{\tau_\theta}{I_{yy}} \\ \dot{r} & = & -\dfrac{I_{yy} - I_{xx}}{I_{zz}} pq + \dfrac{\tau_\psi}{I_{zz}} \end{array}\right. \qquad (2)$$

## Vitesse linéaire $\longrightarrow$ non mesurée $\longrightarrow$ accélération mesurée

$$\left\{\begin{array}{lll} \dot{u} & = & -qw + rv - g\sin\theta \\ \dot{v} & = & -ru + pw + g\sin\Phi\cos\theta \\ \dot{w} & = & -pv + qu + g\cos\Phi\cos\theta - \dfrac{T}{m} \end{array}\right. \qquad (3)$$

# Position du problème



## Les variables mesurées

- les angles de Cardan $\eta = (\Phi\,,\,\theta\,,\,\psi)^T$,
- la vitesse angulaire $\overrightarrow{\omega} = (p\,,\,q\,,\,r)^T$,
- l'accélération $(\dot{u}, \dot{v}, \dot{w})^T$

$\longrightarrow$ Les composantes de l'état des sous-systèmes (1) et (2) sont mesurées.

## Position du problème

- **Problème 1** : estimer la vitesse $x = (u, v, w)^T$ en utilisant la dynamique de la vitesse (3) et les mesures de trois (observateur 1) ou deux (observateur 2) composantes de l'accélération (Problème initialement posé par Benzemrane *et al.*, ACC07).
- **Problème 2** : utiliser l'estimateur précédent pour détecter, isoler et estimer les défauts des accéléromètres.

Prenant en compte les variables mesurées, le système (3) s'écrit :

**Modèle réduit avec mesure des 3 accélérations**

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + b(t) \\ y(t) &= \dot{x}(t) \end{aligned} \tag{4}$$

avec

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$b(t) = \begin{pmatrix} -g \sin\theta \\ g \sin\Phi \cos\theta \\ g \cos\Phi \cos\theta - \frac{T}{m} \end{pmatrix}$$

### Hypothèse 1

$\vec{\omega}(t)$, $\dot{\vec{\omega}}(t)$ et $\ddot{\vec{\omega}}(t)$ sont bornés.

### Remark

*Si l'hypothèse* 1 *est vérifiée* $\Longrightarrow$ *les matrices* $A$, $\dot{A}$ *et* $\ddot{A}$ *sont bornées.* $\square$

### Hypothèse 2

Au moins une composante du vecteur $\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{\omega}}$ ne tend pas vers zéro asymptotiquement.

# Observateur 1 : 3 composantes accélérations mesurées



Considérons l'observateur suivant

## Observateur 1

$$\dot{\hat{x}}(t) = N(t)\hat{x}(t) + M(t)b(t) + K(t)y(t) \tag{5}$$

## Proposition 1

Si les hypothèses 1 et 2 sont vérifiées, et si les matrices $N(t)$, $M(t)$ et $K(t)$ sont choisies telles que

$$N(t) = -\gamma A^T(t)A(t) \tag{6a}$$
$$M(t) = -\gamma A^T(t) \tag{6b}$$
$$K(t) = I + \gamma A^T(t) \tag{6c}$$

où $\gamma$ est un paramètre de synthèse strictement positif, alors l'origine de l'erreur d'observation est asymptotiquement stable. □

*Esquisse de démonstration.* La dynamique de l'erreur d'observation $\epsilon = x - \hat{x}$ s'écrit

$$\dot{\epsilon} = N\epsilon + (A - N - KA)x + (I - M - K)b \qquad (7)$$

### Les conditions de *non biais*

$$\begin{aligned} A - N - KA &= 0 \\ I - M - K &= 0 \end{aligned}$$

sont satisfaites si les matrices $N(t)$, $M(t)$ et $K(t)$ sont choisies comme dans (6) $\Longrightarrow$

### Dynamique de l'erreur d'estimation

$$\dot{\epsilon}(t) = -\gamma A^{\top}(t)A(t)\epsilon(t) \qquad (8)$$

# Démonstration : observateur 1 (suite)



## Fonction de Lyapunov candidate

$$V(\epsilon) = \epsilon^\top \epsilon$$

## Dérivée de $V(\epsilon)$ le long de (8) $\Longrightarrow$

$$\dot{V}(\epsilon) = -2\gamma \|A\epsilon\|^2 \leq 0 \tag{9}$$

## Stabilité asymptotique de l'erreur d'observation

Utiliser le lemme de Barbalat 2 fois :

1. $\dot{V}(\epsilon) \longrightarrow 0$
2. $\epsilon \longrightarrow 0$

# Démonstration : observateur 1 (suite)



$\dot{V}(\epsilon) \leq 0 \implies V(\epsilon) \to \ell$ pour $t \to \infty$ où $\ell$ est une valeur finie.
$\implies \epsilon(t)$ borné.

**Dérivée $\dot{V}(\epsilon)$ le long de (8)**

$$\ddot{V}(\epsilon) = 4\gamma^2 \epsilon^\top A^\top A A^\top A\epsilon - 4\gamma\epsilon^\top \dot{A}^\top A\epsilon.$$

Hypothèse 1 et $\epsilon(t)$ bornée $\implies \ddot{V}(\epsilon)$ bornée
$\implies \dot{V}(\epsilon)$ uniformément continue.

**Lemme de Barbalat**

$\ddot{V}(\epsilon)$ bornée $\implies \dot{V}(\epsilon) \to 0$
$\dot{V}(\epsilon) = -2\gamma\|A\epsilon\|^2 \leq 0$ (9) $\implies A(t)\epsilon(t) \to 0$

### Dérivée de $\varphi(t) = A(t)\epsilon(t)$ :

$$\begin{aligned}\dot{\varphi}(t) &= (\dot{A} - \gamma A A^\top A)\epsilon \\ \ddot{\varphi}(t) &= (\ddot{A} - 2\gamma \dot{A} A^\top A - \gamma A \dot{A}^\top A - \gamma A A^\top \dot{A})\epsilon.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A(t)\,,\ \dot{A}(t)\,,\ \ddot{A}(t)\,,\ \epsilon(t) \text{ bornée} &\implies \ddot{\varphi}(t) \quad \text{bornée} \\ &\implies \dot{\varphi}(t) \quad \text{uniformément continue.}\end{aligned}$$

### Lemme de Barbalat

$\varphi(t) \to 0$ et $\dot{\varphi}(t)$ uniformément continues $\implies$
$\dot{\varphi}(t) = (\dot{A} - \gamma A A^\top A)\epsilon \to 0$ .

Comme $\dot{\varphi}(t) \to 0$ et $A\epsilon \to 0 \implies \dot{A}\epsilon \to 0$.

# Démonstration : observateur 1 (suite et fin)



Réécriture des deux conditions $A\epsilon \rightarrow 0$ et $\dot{A}\epsilon \rightarrow 0$

$$\left\{\begin{array}{lcc} r(t)\epsilon_2(t) - q(t)\epsilon_3(t) & \rightarrow & 0 \\ -r(t)\epsilon_1(t) + p(t)\epsilon_3(t) & \rightarrow & 0 \\ q(t)\epsilon_1(t) - p(t)\epsilon_2(t) & \rightarrow & 0 \end{array}\right. \tag{10}$$

$$\left\{\begin{array}{lcc} \dot{r}(t)\epsilon_2(t) - \dot{q}(t)\epsilon_3(t) & \rightarrow & 0 \\ -\dot{r}(t)\epsilon_1(t) + \dot{p}(t)\epsilon_3(t) & \rightarrow & 0 \\ \dot{q}(t)\epsilon_1(t) - \dot{p}(t)\epsilon_2(t) & \rightarrow & 0 \end{array}\right. \tag{11}$$

- Relations (10) et (11) $\Longrightarrow (q(t)\dot{r}(t) - \dot{q}(t)r(t))\epsilon_3(t) \rightarrow 0$.
- Hypothèse 2 : $\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{\omega}} \not\rightarrow 0 \Longrightarrow q(t)\dot{r}(t) - \dot{q}(t)r(t) \not\rightarrow 0 \Longrightarrow \epsilon_3 \rightarrow 0$.
- $\epsilon_3(t) \rightarrow 0$ et relation (10) $\Longrightarrow \epsilon_1(t) \rightarrow 0$ et $\epsilon_2(t) \rightarrow 0$.
- Le même raisonnement peut être utilisé pour les autres composantes du vecteur $\vec{\omega} \wedge \dot{\vec{\omega}} \Longrightarrow$ stabilité asymptotique de l'erreur d'observation. $\square$

# Problème 1 : 2 composantes accélérations mesurées



## Modèle

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + b(t) \\ y(t) &= C\dot{x}(t) \end{aligned} \tag{12}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \tag{13}$$

## Observateur 2

$$\dot{\hat{x}}(t) = N(t)\hat{x}(t) + M(t)b(t) + K(t)y(t) \tag{14}$$

$$L(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -p/r & -q/r \end{pmatrix} \tag{15a}$$

$$K(t) = L + \gamma A^T(t)C^T \tag{15b}$$

$$N(t) = A(t) - K(t)CA(t) \tag{15c}$$

$$M(t) = I - K(t)C \tag{15d}$$

Paramètres du quadrirotor (Benzemrane, Santossuosso, Damm, ACC07) :

- $m = 2.5\ kg$,
- $I_{xx} = 224931\ 10^{-7}\ kg.m^2$,
- $I_{yy} = 222611\ 10^{-7}\ kg.m^2$
- $I_{zz} = 325130\ 10^{-7}\ kg.m^2$.

Les figures syuivantes représentent les erreurs d'observation $\epsilon_i$ (ième composante de $\epsilon$) pour différents cas

- cas 1 : Observateur 1, bruit Gaussien sur les mesures (écart type : 1, moyenne : 0) (figures 1 à 3)
- cas 2 : Observateur 2, bruit Gaussien sur les mesures (écart type : 1, moyenne : 0) (figures 4 à 6)

# Observateur 1 : 3 accélérations mesurées, bruit gaussien



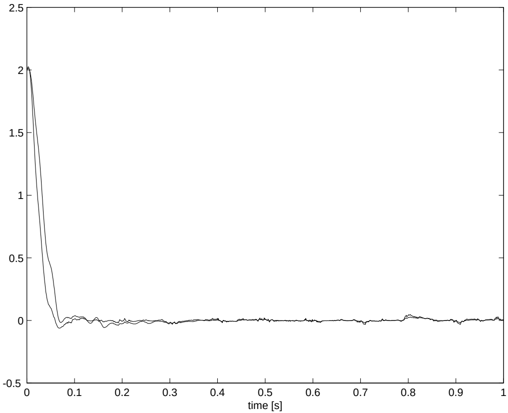



FIG.: 1 : Erreur d'observation $\varepsilon_1(t)$ avec $\gamma = 100$ (dynamique rapide) et $\gamma = 50$.

# Observateur 1 : 3 accélérations mesurées, bruit gaussien



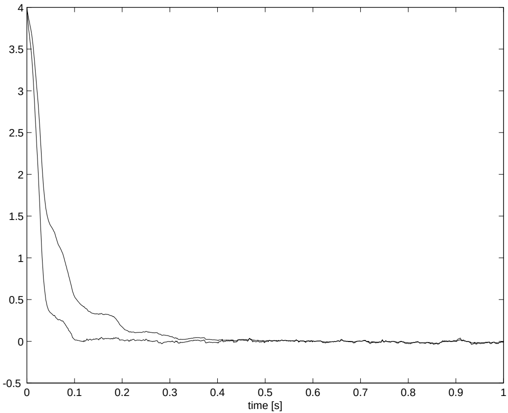



FIG.: 2 : Erreur d'observation $\varepsilon_2(t)$ avec $\gamma = 100$ (dynamique rapide) et $\gamma = 50$.

# Observateur 1 : 3 accélérations mesurées, bruit gaussien



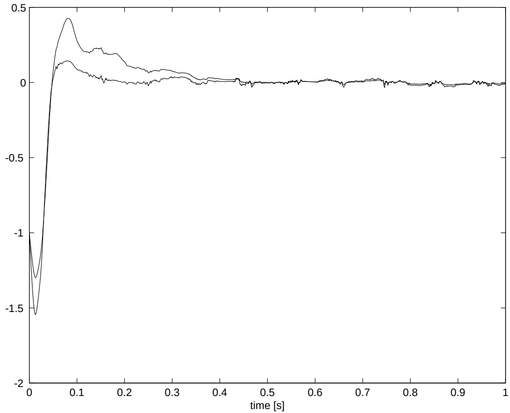



FIG.: 3 : Erreur d'observation $\varepsilon_3(t)$ avec $\gamma = 100$ (dynamique rapide) et $\gamma = 50$.

# Observateur 2 : 2 accélérations mesurées, bruit gaussien



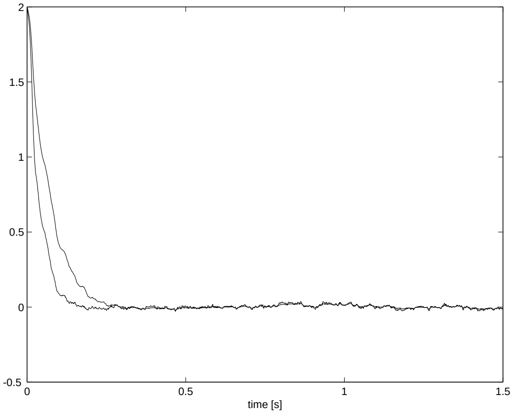



FIG.: 4 : Erreur d'observation $\varepsilon_1(t)$ avec $\gamma = 100$ (dynamique rapide) et $\gamma = 50$.

# Observateur 2 : 2 accélérations mesurées, bruit gaussien



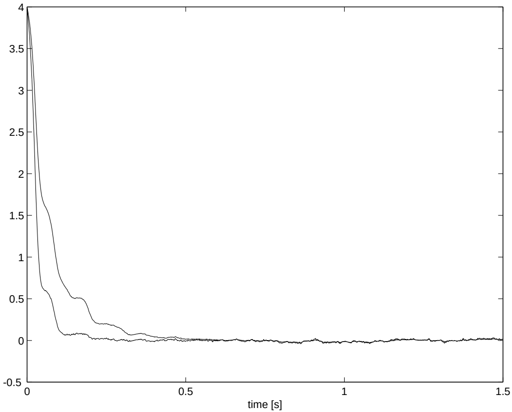



FIG.: 5 : Erreur d'observation $\varepsilon_2(t)$ avec$\gamma = 100$ (dynamique rapide) et $\gamma = 50$.

# Observateur 2 : 2 accélérations mesurées, bruit gaussien



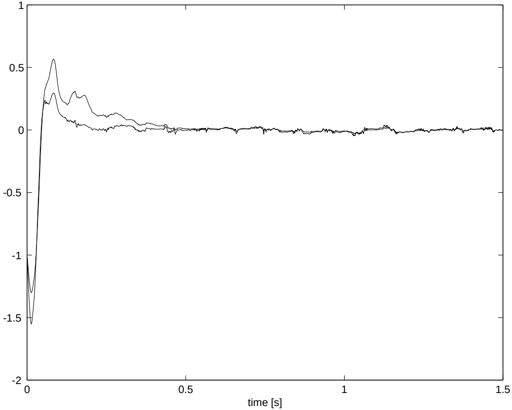



FIG.: 6 : Erreur d'observation $\varepsilon_3(t)$ avec $\gamma = 100$ (dynamique rapide) et $\gamma = 50$.

### Modèle d'état

Soit $x = (u, v, w)^T$ la vitesse linéaire à estimer et $f(t)$ le vecteur des défauts de capteur

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(t)x(t) + b(t) \\ y(t) &= \dot{x}(t) + f(t) \end{aligned} \quad (16)$$

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & r & -q \\ -r & 0 & p \\ q & -p & 0 \end{pmatrix} \qquad b(t) = \begin{pmatrix} -g \sin\theta \\ g \sin\Phi \cos\theta \\ g \cos\Phi \cos\theta - \frac{T}{m} \end{pmatrix}$$

- Les défauts $f(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) & f_2(t) & f_3(t) \end{bmatrix}^T$ considérés sont temps variant,
- et incluent les dérives, les variations de gain ou les biais de capteurs.

# Estimation de la vitesse, génération de résidus et estimation des défauts (OGR)



Il s'agit de proposer une banque de 3 Observateurs-Générateurs de Résidus (OGR) de la forme (pour $i = 1, 2, 3$)

**$i^{\text{ème}}$ OGR**

$$(\mathcal{O}_i)\begin{cases} \dot{\hat{x}}^i(t) & = & N_i(t)\hat{x}^i(t) + M_i(t)b(t) + K_i(t)Y^i(t) \\ \rho^i(t) & = & Q_i(t)\dot{\hat{x}}^i(t) + P_i(t)Y^i(t) \\ \hat{f}_i(t) & = & \overline{Y}^i(t) - \overline{C}_i(t)\dot{\hat{x}}^i(t) \end{cases} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} Y^i(t) &= C_i y(t) = C_i\dot{x} + \overline{f}^i(t) \\ \overline{Y}^i(t) &= \overline{C}_i y(t) = \overline{C}_i\dot{x} + f_i(t) \end{aligned}$$

$$\overline{f}^1(t) = \begin{bmatrix} f_2(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix}, \overline{f}^2(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_3(t) \end{bmatrix} \text{ et } \overline{f}^3(t) = \begin{bmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{bmatrix}$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overline{C}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \overline{C}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \overline{C}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

où $\hat{x}^i(t)$, $\hat{f}_i(t)$ sont respectivement les estimations de la vitesse $x(t)$ et de la composante $f_i(t)$ du défaut et $\rho^i(t)$ le $i^{\text{ème}}$ vecteur des résidus.

1. Les deux premières composantes mesurées de l'accélération $Y^i(t)$ sont utilisées pour l'estimation de la vitesse et la génération des résidus (utilisation de l'observateur d'ordre réduit précédent),
2. la mesure de la troisième composante de l'accélération $\overline{Y}^i(t)$ est utilisée pour reconstruire le défaut de capteur.

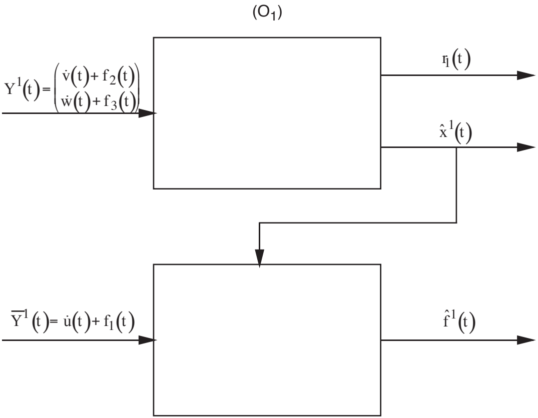
- Si les capteurs mesurant les accélérations $Y^i(t)$ sont sans défaut,
  - $\Rightarrow$ l'erreur d'estimation est asymptotiquement stable,
  - $\Rightarrow$ les residus correspondant sont nuls,
  - $\Rightarrow$ l'erreur d'estimation du défaut $f_i(t)$ est asymptotiquement stable.
- dans le cas où un ou deux capteurs mesurant $Y^i(t)$ est en défaut,
  - $\Rightarrow$ les résidus correspondant à cet OGR sont différents de zéro,
  - $\Rightarrow$ les erreurs d'estimation de l'état et des défauts fournies par cet OGR ne sont pas asymptotiquement stables.

$\Rightarrow$ peut détecter et estimer la vitesse et les défauts de capteur si au plus un capteur en défaut,

$\Rightarrow$ si plusieurs capteurs en défaut, peut seulement détecter la présence des défauts.

# Schéma de principe de l'OGR ($\mathcal{O}_1$)





## Proposition 2

Supposons que les hypothèses 1 et 2 sont vérifiées et si les matrices $N_i(t)$, $M_i(t)$, $K_i(t)$, $Q_i$ et $P_i$ sont choisies telles que

$$K_i(t) = L_i + \gamma_i A^T(t) C_i^T \tag{18a}$$

$$N_i(t) = A(t) - K_i(t) C_i A(t) \tag{18b}$$

$$M_i(t) = I - K_i(t) C_i \tag{18c}$$

$$Q_i = -\beta_i C_i \tag{18d}$$

$$P_i = \beta_i I \tag{18e}$$

$$L_1(t) = \begin{pmatrix} -q/p & -r/p \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad L_2(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -p/q & -r/q \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{19a}$$

$$L_3(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -p/r & -q/r \end{pmatrix} \tag{19b}$$

où $\gamma_i$ et $\beta_i$ des paramètres de synthèse

alors

## Proposition 2 suite

1. Si $\overline{f}^i(t) \equiv 0$ ( $Y^i(t)$ est sans défaut ) l'erreur d'observation $\epsilon^i = x - \hat{x}^i$ est asymptotiquement stable et $\rho^i(t) \to 0$ et $\hat{f}_i(t) \to f_i(t)$ lorsque $t \to \infty$.
2. Si $\overline{f}^i(t) \neq 0$ *i.e.* $f_j(t) \neq 0$ pour $j \neq i$ et $f_j(t) \neq \dot{\sigma}_j$ avec $\sigma$ solution de $\dot{\sigma}(t) = A(t)\sigma(t)$ alors $\rho^i(t) \neq 0$ et $\rho^i(t) \nrightarrow 0$ ($\sigma_j$ est la $j^{\text{ème}}$ composante de $\sigma$). ■

$$(\mathcal{O}_i) \left\{ \begin{array}{lcl} \dot{\hat{x}}^i(t) & = & N_i(t)\hat{x}^i(t) + M_i(t)b(t) + K_i(t)Y^i(t) \\ \rho^i(t) & = & Q_i(t)\dot{\hat{x}}^i(t) + P_i(t)Y^i(t) \\ \hat{f}_i(t) & = & \overline{Y}^i(t) - \overline{C}_i(t)\dot{\hat{x}}^i(t) \end{array} \right.$$

## Esquisse de démonstration

Soient $\epsilon^i = x - \hat{x}^i$ l'erreur d'estimation, $\epsilon_f^i(t) = f_i(t) - \hat{f}_i(t)$ l'erreur d'estimation des défauts, et $\rho^i(t)$ le $i^{\text{ème}}$ vecteur des résidus.
Equations modèle (16) et équations OGR (17) $\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
\dot{\epsilon}^i(t) &= N_i\epsilon^i(t) + (A - N_i - K_iC_iA)x(t) \qquad (20)\\
&+ (I - M_i - K_iC_i)b(t) - \left(L_i + \gamma_i A^T C_i^T\right)\bar{f}^i(t)\\
\rho^i(t) &= P_i\left(C_i\dot{\epsilon}^i(t) + \bar{f}^i(t)\right) \qquad (21)\\
\epsilon_f^i(t) &= -\overline{C}_i\dot{\epsilon}^i(t) \qquad (22)
\end{aligned}$$

## Conditions de non biais

$$\begin{aligned}
A - N_i - K_iC_iA &= 0\\
I - M_i - K_iC_i &= 0
\end{aligned}$$

sont satisfaites si les matrices $N_i(t)$, $M_i(t)$ et $K_i(t)$ sont choisies comme dans (18).

### Esquisse de démonstration suite

Expression de $K_i(t) \Longrightarrow$

$$N_i(t) = A(t) - L_i(t)C_iA(t) - \gamma_i A^T(t)C_i^T C_iA(t) \tag{23}$$

Choix de $L_i$ comme dans (19) $\Longrightarrow A(t) - L_i(t)C_iA(t) = 0 \Longrightarrow$

### Dynamique de l'erreur d'observation

$$\dot{\epsilon}^i(t) = -\gamma_i A^T(t)C_i^T C_iA(t)\epsilon^i(t) - \left(L_i + \gamma_i A^T C_i^T\right)\bar{f}^i(t) \tag{24}$$

### Première étape

La démonstration se fait en deux étapes.

1. Si $\bar{f}^i(t) \equiv 0$ alors l'erreur d'observation $\epsilon^i = x - \hat{x}^i$ est asymptotiquement stable, le $i^{\text{ème}}$ vecteur des résidus $\rho^i(t)$ et l'erreur d'estimation des défauts $\epsilon_f^i(t)$ convergent vers 0.

# Esquisse de démonstration (suite)



Considérons le cas $\bar{f}^i(t) \equiv 0 \Longrightarrow$

### Dynamique de l'erreur d'observation

$$\dot{\epsilon}^i(t) = -\gamma_i A^T(t) C_i^T C_i A(t) \epsilon^i(t) \tag{25}$$

### Fonction de Lyapunov candidate

$$V(\epsilon^i) = \epsilon^{iT} \epsilon^i$$

### Dérivée de $V$ le long de la dynamique de l'erreur d'observation

$$\dot{V}(\epsilon^i) = -2\gamma_i \| C_i A \epsilon^i \|^2 \ \leq \ 0 \tag{26}$$

1. Lemme de Barbalat $\longrightarrow \dot{V}(\epsilon^i) \to 0$ lorsque $t \to \infty$,
2. Lemme de Barbalat $\longrightarrow \epsilon^i(t) \to 0$ lorsque $t \to \infty$.

Cas $\bar{f}^i(t) \equiv 0 \longrightarrow$ l'origine de l'erreur d'observation $\epsilon^i(t)$ est asymptotiquement stable.

# Esquisse de démonstration (suite)



## Résidus et erreur d'estimation des défauts

$$\rho^i(t) = -\beta_i \gamma_i C_i A^T(t) C_i^T C_i A(t) \epsilon^i(t) \quad (27)$$

$$\epsilon_f^i(t) = \gamma_i \overline{C}_i A^T(t) C_i^T C_i A(t) \epsilon^i(t) \quad (28)$$

Relations (27) et (28) (cas $\overline{f}^i(t) \equiv 0$),

- $\epsilon^i \to 0 \Longrightarrow \epsilon_f^i \to 0$
- $\epsilon^i \to 0 \Longrightarrow \rho^i \to 0$

# Cas $\bar{f}^i(t) \neq 0$ : défauts de capteurs $f_{pk}$ non detectable ?



Considérons le cas $\bar{f}^i(t) \neq 0$ *i.e.* au moins un défaut $f_j \neq 0$ pour $j \neq i$ $\longrightarrow$

## Résidus

$$\rho^i(t) = S_i(t)\epsilon^i(t) + T_i(t)\bar{f}^i(t) \quad (29)$$

avec

$$S_i = -\gamma_i\beta_i C_i A^T(t) C_i^T C_i A(t)$$

$$T_i = -\beta_i C_i(L_i + \gamma_i A^T(t) C_i^T) + \beta_i I = -\beta_i\gamma_i C_i A^T(t) C_i^T$$

**Existe-il $\left(\bar{f}_p^i(t) \neq 0, \epsilon_p^i(t)\right)$ tel que le résidus $\rho^i(t)$ soit nul**

$$\rho^i(t) = S_i(t)\epsilon_p^i(t) + T_i(t)\bar{f}_p^i(t) = 0?$$

$$\Longrightarrow \bar{f}_p^i(t) = -T_i^{-1}(t) S_i(t)\epsilon_p^i(t) \quad (30)$$

# Cas $\bar{f}^i(t) \neq 0$ : défauts de capteurs $f_{pk}$ non detectable ?



$\Longrightarrow$

$$\dot{\epsilon}_p^i(t) = A(t)\epsilon_p^i(t) \tag{31}$$

$\Longrightarrow$ les défauts de capteurs non détectables $f_{pk}$ vérifient

$$f_{pk} = \dot{\sigma}_k$$

où $\sigma$ est solution de (31) et $\sigma_k$ est la $k^{\text{ème}}$ composante de $\sigma$.

**Remarque**

Plus précisément, s'il existe $f_j(t) \neq 0$ pour $j \neq i$ et $f_j(t) \neq \dot{\sigma}_j$ avec $\sigma$ solution de $\dot{\sigma}(t) = A(t)\sigma(t)$ alors $\rho^i(t) = 0$ sinon $\rho^i(t) \neq 0$ et $\rho^i(t) \not\to 0$.

# Cas $\bar{f}^i(t) \neq 0$ : défauts de capteurs $f_{pk}$ non detectable ?



### Remark

*La possibilité que la trajectoire d'un défaut de capteur vérifie $f_{pk} = \dot{\sigma}_k$ avec $\sigma$ solution de $\dot{\sigma}(t) = A(t)\sigma(t)$ est très faible. Nous pouvons donc détecter, isoler et estimer la plupart des défauts.* □

### Remark

*Dans le cas d'un défaut sur un seul capteur $f_i$, l'observateur $(\mathcal{O}_i)$ fournit une estimation de la vitesse et du défaut et le vecteur des résidus $\rho^i$ converge vers 0. De plus, les autres résidus sont différents de zéro.* □

### Remark

*Dans le cas où deux ou trois capteurs sont défectueux, nous pouvons seulement détecter la présence de défauts car tous les résidus sont non nuls et ne convergent pas vers zéro (sauf si les défauts disparaissent).* □

Paramètres du quadrirotor (Benzemrane, Santossuosso, Damm, ACC07) :

- $m = 2.5\ kg$,
- $I_{xx} = 224931\ 10^{-7}\ kg.m^2$,
- $I_{yy} = 222611\ 10^{-7}\ kg.m^2$
- et $I_{zz} = 325130\ 10^{-7}\ kg.m^2$.

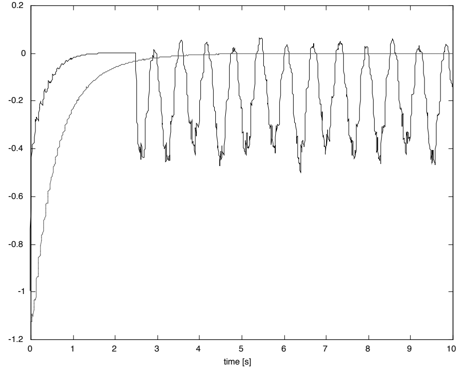
Les défauts de capteurs sont

- $f_1(t) \equiv 0$,
- $f_2(t) \equiv 0$,
- et $f_3(t) = \mathcal{H}(t-2.5)\,(0.6+\sin(20\pi t+1))$ où $\mathcal{H}(.)$ est la fonction de Heaviside.

Les figures suivantes représentent les erreurs d'estimation pour les OGR $\mathcal{O}_2$ et $\mathcal{O}_3$, les résidus $\rho^2(t)$ et $\rho^3(t)$, le défaut $f_3(t)$ et son estimation $\hat{f}_3(t)$.

# Erreurs d'estimation $\varepsilon_1^2(t)$ et $\varepsilon_1^3(t)$

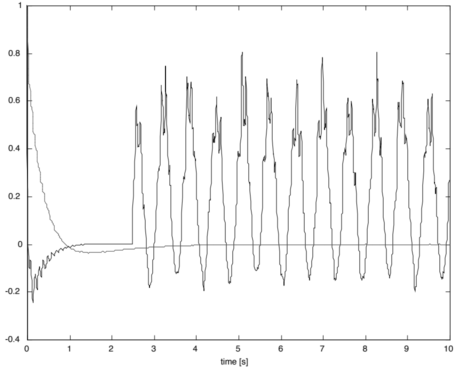





- $\varepsilon_1^2(t) \not\to 0$ ($\mathcal{O}_2$) sensible au défaut $f_3(t)$
- $\varepsilon_1^3(t) \to 0$ ($\mathcal{O}_3$)

# Erreurs d'estimation $\varepsilon_2^2(t)$ et $\varepsilon_2^3(t)$

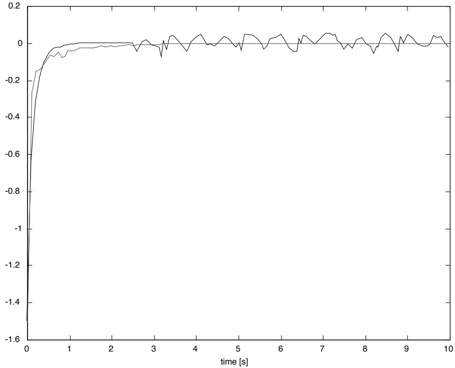





- $\varepsilon_2^2(t) \not\to 0$ $(\mathcal{O}_2)$ sensible au défaut $f_3(t)$
- $\varepsilon_2^3(t) \to 0$ $(\mathcal{O}_3)$

# Erreurs d'estimation $\varepsilon_3^2(t)$ et $\varepsilon_3^3(t)$

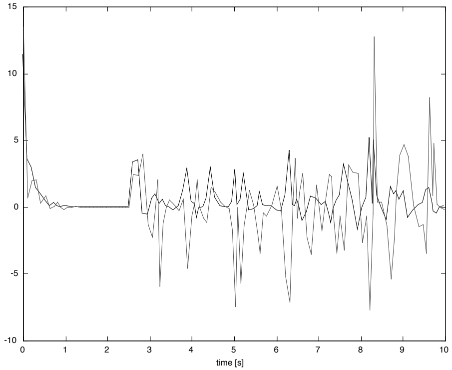





- $\varepsilon_3^2(t) \not\to 0$ $(\mathcal{O}_2)$ sensible au défaut $f_3(t)$
- $\varepsilon_3^3(t) \to 0$ $(\mathcal{O}_3)$

# Residus $\rho^2(t)$

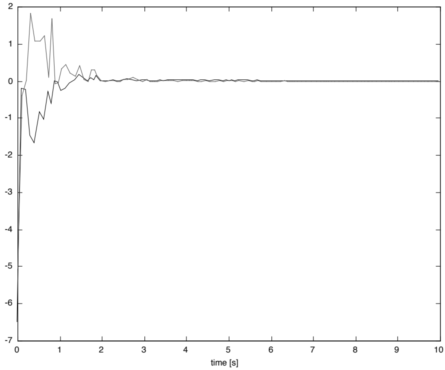





- $\rho^2(t) \not\to 0$ sensible au défaut $f_3(t)$

# Residus $\rho^3(t)$

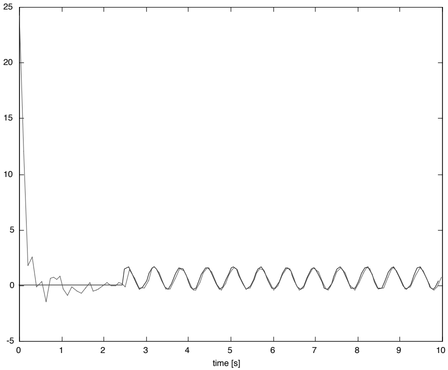





- $\rho^3(t) \to 0 \Longrightarrow$ insensible au défaut $f_3(t)$

# Défaut $f_3(t)$ et son estimation $\hat{f}_3(t)$





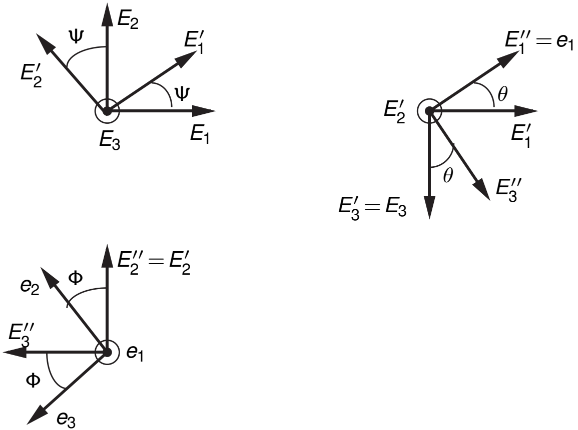

L'estimation du défaut de capteur
$f_3(t) = \mathcal{H}(t-2.5)\,(0.6 + \sin(20\pi t + 1))$ est satisfaisante

- les résidus $\rho^3(t)$ donnés par $\mathcal{O}_3$ convergent vers zéro $\Longleftarrow f_1(t) \equiv 0$ et $f_2(t) \equiv 0$,
- $\Longrightarrow$ les erreurs d'estimation (vitesse et défaut) fournies par le OGR $\mathcal{O}_3$ sont asymptotiquement stables,
- Les résidus $\rho^2(t)$ donnés par $\mathcal{O}_2$ sont sensibles au défaut $f_3(t)$,
- Les erreurs d'estimation données par $\mathcal{O}_2$ ne sont pas asymptotiquement stables,
- la reconstruction du défaut de capteur est satisfaisante.

Merci de votre attention.

# Cardan angles





- D. B. Lee, T. C. Burg, B. Xian and D. M. Dawson, "Output feedback tracking control of an underactuated quad-rotor UAV", *American Control Conference*, New York, 2007.
- T. Madani and A. Benallegue, "Sliding mode observer and backstepping control for a quadrotor unmanned aerial vehicles", *American Control Conference*, New York, 2007.
- A. Benallegue, A. Mokhtari and L. Fridman, "High-order sliding-mode observer for a quadrotor UAV", *Int. J. of Robust and Nonlinear Control*, 2008.
- F. LeBras, T. Hamel and R. Mahony, "Nonlinear observer-based visual control of a VTOL UAV", *European Control Conference*, Kos, Greece, 2007.
- R. Sharma and M. Aldeen, "Fault and unknown input reconstruction in VTOL aircraft system using sliding mode observer", *European Control Conference*, Kos, Greece, 2007.
- F. Bateman, H. Noura and M. Ouladsine, "An actuator fault detection, isolation and estimation system for an UAV using input observers", *European Control Conference*, Kos, Greece, 2007.

N. Siegers and M. Costello, "Variable structure observer for control bias on unmanned air vehicles", *J. of Guidance, Cont., and Dynamics*, vol. 30, pp 281–286, 2007.

C. G. Prevost, A. Desbiens and E. Gagnon, "Extended Kalman filter for state estimation and trajectory prediction of a moving object detected by an unmanned aerial vehicle", *American Control Conference*, New York, 2007.

K. Benzemrane, G. L. Santosuosso and G. Damm, "Unmanned aerial vehicle speed estimation via nonlinear adaptive observers", *American Control Conference*, New York, 2007.

L. Besnard, Y.B. Shtessel and B. Landrum, "Control of a quadrotor vehicle using sliding mode disturbance observer", *American Control Conference*, New York, 2007.

D. Blake and M. Brown, "Simultaneous, multiplicative actuator and sensor fault estimation", *European Control Conference*, Kos, Greece, 2007.

M. Boutayeb, E. Richard, H. Rafaralahy, H. Souley Ali and G. Zaloylo, "A simple time-varying observer for speed estimation of UAV", *IFAC World Congress*, Seoul, Korea, 2008.

- P. Castillo, R. Lozano and A. Dzul, *Modelling and control of mini-flying machines*, Springer-Verlag, 2005.
- J. C. Deckert, M. N. Desai, J. J. Deyst and A. S. Willsky, "F-8 DFBW sensor failure identification using analytic redundancy", *IEEE Trans. Aut. Cont.*, Vol. 22, 5, 1977.
- D. Lara Alabazares, *Modélisation et commande robuste des drones miniatures : conception de l'architecture embarquée*, PhD thesis, UTC, Compiegne, France, 2007.
- A. Monteriu, P. Asthana, K. Valavanis and S. Longhi, "Residual generation approaches in navigation sensors fault detection applications", *European Control Conference*, Kos, Greece, 2007.
- H. Nijmeijer, A. J. van der Schaft, *nonlinear dynamical control systems*, Springer-Verlag, 1990.
- N. P. Piercy, "Sensor failure estimators for detection filters", *IEEE Trans. Aut. Cont.*, Vol. 37, 10, 1992.
- H. Rafaralahy, M. Zasadzinski and M. Boutayeb, "Discussion on sensor gain fault diagnosis for a class of nonlinear systems", *European Journal of Control*, Vol. 12, 5, 2006.

- H. Rafaralahy, M. Zasadzinski, M. Boutayeb and H. Souley Ali, "Sensor bias estimation for bilinear systems", *Conference on Systems and Control*, Marrakesh, Morocco, 2007.
- Y. Wang and D.H. Zhou, "Sensor gain fault diagnosis for a class of nonlinear systems", *European Journal of Control*, Vol. 12, 5, pp. 523-535, 2006.
- H. Rafaralahy, E. Richard, M. Boutayeb and M. Zasadzinski, "Simultaneous observer based diagnosis and speed estimation of Unmanned Aerial Vehicle", *Conference on Decision and Control*, Cancun, Mexico, 2008.
- E. Richard, M. Boutayeb, H. Rafaralahy and M. Zasadzinski, "Design of speed and sensor bias estimator for Unmanned Aerial Vehicle", *European Control Conference*, Budapest, Hungary, 2009.